

第2讲 方程（组）与不等式（组）综合（练习）

一、已知解方程解的范围求参数范围

1. 若关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x + y = k - 2 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$ 的解满足 $x + y > 1$ ，则实数 k 的取值范围是（ ）.
- A. $k < 0$ B. $k < -1$ C. $k < -2$ D. $k < -3$

【答案】 D

【解析】 由 $2x + y = k - 2$ ，得 $y = k - 2 - 2x$ ③，

把③代入 $3x + 2y = -4$ ，得

$3x + 2(k - 2 - 2x) = -4$. 解得 $x = 2k$.

把 $x = 2k$ 代入③，得

$y = -2 - 3k$.

由 $x + y > 1$ ，得

$2k - 2 - 3k > 1$.

解得 $k < -3$ ，

故选D .

【标注】 【知识点】 二元一次方程组解的情况

2. 已知关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = 1 - m \\ x - 4y = \frac{8}{3} - 5m \end{cases}$ 的解满足 $x < -2y$ ，其中 m 是非负整数，求 m 的值 .

【答案】 m 的值为0 .

【解析】 由方程组得： $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - m \\ y = m - \frac{1}{2} \end{cases}$ ，

将方程组的解代入 $x < -2y$ 得：

$\frac{2}{3} - m < -2(m - \frac{1}{2})$ ，
 $\frac{2}{3} - m < -2m + 1$ ，

$$m < \frac{1}{3},$$

又： m 为非负整数，

$$\therefore m = 0,$$

即 m 的值为0.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

3. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + y = 3m - 5 \\ x - y = m - 1 \end{cases}$ ，若 $x + y > 3$ ，则 m 的取值范围是（ ）.

A. $m > 1$

B. $m < 2$

C. $m > 3$

D. $m > 5$

【答案】 D

【解析】 $\begin{cases} 3x + y = 3m - 5 \text{ ①} \\ x - y = m - 1 \text{ ②} \end{cases}$,

$$\text{①} + \text{②} \text{得: } 4x = 4m - 6, \text{ 即 } x = \frac{2m - 3}{2},$$

$$\text{①} - \text{②} \times 3 \text{得: } 4y = -2, \text{ 即 } y = -\frac{1}{2},$$

$$\text{根据 } x + y > 3 \text{得: } \frac{2m - 3}{2} - \frac{1}{2} > 3,$$

$$\text{去分母得: } 2m - 3 - 1 > 6, \text{ 解得: } m > 5.$$

【标注】【知识点】根据解的不等关系解含参的二元一次方程组

4. 若关于 x, y 的方程 $\begin{cases} x - y = 12 - m \\ 3x + y = 4 + 3m \end{cases}$ 的解满足 $x + y < 6$ ，则 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $m < 5$

【解析】 $\begin{cases} x - y = 12 - m \text{ ①} \\ 3x + y = 4 + 3m \text{ ②} \end{cases}$,

②-①得：

$$2x + 2y = 4m - 8,$$

$$x + y = 2m - 4,$$

$$\therefore x + y < 6,$$

$$\therefore 2m - 4 < 6,$$

$$\therefore m < 5.$$

故答案为： $m < 5$.

【标注】【知识点】根据解的不等关系解含参的二元一次方程组

5. 已知 $\begin{cases} x + 2y = 4k \\ 2x + y = 2k + 1 \end{cases}$, 且 $x - y < 0$, 则 k 的取值范围为 _____.

【答案】 $k > \frac{1}{2}$

【解析】 解方程组 $\begin{cases} x + 2y = 4k \text{ ①} \\ 2x + y = 2k + 1 \text{ ②} \end{cases}$,

$$\text{①} \times 2 \text{ 得: } 2x + 4y = 8k \text{ ③},$$

$$\text{③} - \text{②} \text{ 得: } 3y = 6k - 1,$$

$$\therefore y = 2k - \frac{1}{3},$$

$$\text{②} \times 2 \text{ 得: } 4x + 2y = 4k + 2 \text{ ④},$$

$$\text{④} - \text{①} \text{ 得: } 3x = 2,$$

$$\therefore x = \frac{2}{3},$$

$$\because x - y < 0,$$

$$\therefore x - y = \frac{2}{3} - (2k - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} - 2k + \frac{1}{3} < 0,$$

$$\therefore 1 - 2k < 0,$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } k > \frac{1}{2}.$$

【标注】 **【知识点】** 根据解的不等关系解含参的二元一次方程组

二、已知参数范围求方程组解的范围

6. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + 3y = 4 - a \\ x - y = 3a \end{cases}$, 其中 $-3 \leq a \leq 1$, 给出下列结论: ① $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ 是方程的解; ② 当 $a = -2$ 时, x, y 的值互为相反数; ③ 当 $a = 1$ 时, 方程组的解也是方程 $x + y = 4 - a$ 的解; ④ 若 $x \leq 1$, 则 $1 \leq y \leq 4$. 其中正确的是 ().
- A. ①② B. ②③ C. ②③④ D. ①③④

【答案】 C

【解析】 解方程组 $\begin{cases} x + 3y = 4 - a \\ x - y = 3a \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 1 + 2a \\ y = 1 - a \end{cases}$,

$$\because -3 \leq a \leq 1,$$

$$\therefore -5 \leq x < 3, 0 \leq y \leq 4,$$

$$\text{①} \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 不符合 } -5 \leq x < 3, 0 \leq y \leq 4, \text{ 结论错误;}$$

②当 $a = -2$ 时, $x = 1 + 2a = -3$, $y = 1 - a = 3$, x, y 的值互为相反数, 结论正确;

③当 $a = 1$ 时, $x + y = 2 + a = 3$, $4 - a = 3$, 方程 $x + y = 4 - a$ 两边相等, 结论正确;

④当 $x \leq 1$ 时, $1 + 2a \leq 1$, 解得 $a < 0$, 且 $-3 \leq a \leq 1$,

$\therefore -3 \leq a \leq 0$,

$\therefore 1 \leq 1 - a \leq 4$,

$\therefore 1 \leq y \leq 4$, 结论正确.

故选C.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

7. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + 3y = 4 - a \\ x - y = 3a \end{cases}$, 其中 $-3 \leq a \leq 1$, 给出下列说法: ①当 $a = 1$ 时, 方程组的解也是方程 $x + y = 4 - a$ 的解; ②当 $a = -2$ 时, x, y 的值互为相反数; ③若 $x \leq 1$, 则 $1 \leq y \leq 4$; ④ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ 是方程组的解, 其中说法错误的是().

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】A

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

8. 若关于 x, y 方程组 $\begin{cases} 3x + y = k + 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ 的解为 x, y , 且 $-2 < k < 4$, 则 $x - y$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $-2 < x - y < 1$

【解析】 $\begin{cases} 3x + y = k + 1 \text{ ①} \\ x + 3y = 3 \text{ ②} \end{cases}$

①-②得, $2x - 2y = k - 2$,

所以, $x - y = \frac{k - 2}{2}$,

$\therefore -2 < k < 4$,

$\therefore -4 < k - 2 < 2$,

$\therefore -2 < \frac{k - 2}{2} < 1$,

即 $x - y$ 的取值范围是 $-2 < x - y < 1$.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

9. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + 3y = 4 - a \\ x - y = 3a \end{cases}$, 其中 $-3 \leq a \leq 1$. 若 $x \leq 1$, 求 y 的取值范围.

【答案】 $1 \leq y \leq 4$.

【解析】 $\begin{cases} x + 3y = 4 - a \text{ ①} \\ x - y = 3a \text{ ②} \end{cases}$,

①-②, 得: $4y = 4 - 4a$,

解得: $y = 1 - a$,

将 $y = 1 - a$ 代入②, 得: $x - 1 + a = 3a$,

解得: $x = 2a + 1$,

则 $\begin{cases} x = 2a + 1 \\ y = 1 - a \end{cases}$,

$\because x = 2a + 1 \leq 1$, 即 $a \leq 0$,

$\therefore -3 \leq a \leq 0$, 即 $1 \leq 1 - a \leq 4$,

则 $1 \leq y \leq 4$.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

10. 已知方程组 $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$, 并且 $2 < z < 4$, 求 $x - y$ 的取值范围.

【答案】 $0 < x - y < 1$

【解析】 法一: 两式相减, 得: $2x - 2y = z - 2$,

$\therefore x - y = \frac{z}{2} - 1$, $\because 2 < z < 4$, $\therefore 0 < x - y < 1$.

法二: 原方程组可化为: $\begin{cases} x = \frac{3}{8}z \\ y = \frac{8-z}{8} \end{cases}$, 则 $x - y = \frac{3}{8}z - \frac{8-z}{8} = \frac{z}{2} - 1$,

$\because 2 < z < 4$, $\therefore 0 < x - y < 1$.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

三、不定方程求解的范围

11. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x - y = 2a - 5 \\ x + 2y = 3a + 3 \end{cases}$ 的解都为正数, 且满足 $a + b = 4$, $b > 0$, $z = a - 3b$, 则 z 的取值范围是 ().

A. $-8 < z < 4$

B. $-7 < z < 8$

C. $-7 < z < 4$

D. $-8 < z < 8$

【答案】 A

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \therefore & \begin{cases} 3x - y = 2a - 5 \\ x + 2y = 3a + 3 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} x = a - 1 \\ y = a + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

由于该方程组的解都是正数，

$$\therefore \begin{cases} a - 1 > 0 \\ a + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore a > 1,$$

$$\therefore a + b = 4,$$

$$\therefore a = 4 - b,$$

$$\therefore \begin{cases} b > 0 \\ 4 - b > 1 \end{cases}$$

$$\text{解得：} 0 < b < 3,$$

$$z = a - 3b = (4 - b) - 3b = 4 - 4b,$$

$$z = 4 - 4b,$$

$$b = \frac{4 - z}{4},$$

$$0 < \frac{4 - z}{4} < 3,$$

$$0 < 4 - z < 12,$$

$$-4 < -z < 8,$$

$$-8 < z < 4.$$

故选A.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

12. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + y = 30 - k \\ 3x + y = 50 + k \end{cases}$ 的解都是非负数. 若 $M = 3x - 2y$, 则 M 的最大值与最小值的差为 _____.

【答案】 140

$$\text{【解析】} \begin{cases} x + y = 30 - k \text{①} \\ 3x + y = 50 + k \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②},$$

$$-2x = -20 - 2k \text{③}$$

$$x = 10 + k,$$

∴解为非负数 $k + 10 \geq 0, k \geq -10$,

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2},$$

$$2y = 40 - 4k \textcircled{4}$$

$$y = 20 - 2k$$

$$20 - 2k \geq 0,$$

$$k \leq 10,$$

$$M = 3x - 2y = 3(10 + k) - 2(20 - 2k)$$

$$= 7k - 10$$

$$(-10 \leq k \leq 10),$$

$k = -10$ 时, M 最小值.

$$M = 7 \times (-10) - 10 = -80,$$

$$k = 10 \text{ 时, } M \text{ 最大值, } M = 7 \times 10 - 10 = 60,$$

$$60 - (-80) = 140.$$

即最大值与最小值之差为 140.

故答案为: 140.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

13. 若 a, b 满足 $3a^2 + 5|b| = 7, s = 2a^2 - 3|b|$, 求 s 的最值.

【答案】 s 的最大值是 $\frac{14}{3}$, 最小值是 $-\frac{21}{5}$

【解析】 由题意得:
$$\begin{cases} a^2 = \frac{5s + 21}{19} \\ |b| = \frac{14 - 3s}{19} \end{cases}$$

$$\text{又} \because a^2 \geq 0, |b| \geq 0$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{5s + 21}{19} \geq 0 \\ \frac{14 - 3s}{19} \geq 0 \end{cases}, \text{解得} -\frac{21}{5} \leq s \leq \frac{14}{3},$$

$$\therefore s \text{ 的最大值是 } \frac{14}{3}, \text{ 最小值是 } -\frac{21}{5}.$$

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况